Ausgedünnte Wallis-Primzahlprodukte

Mike Winkler

Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, Germany
mike.winkler@ruhr-uni-bochum.de

2. April 2026

Zusammenfassung

Im Zentrum dieses Artikels steht ein unendliches Produkt über Primzahlen. Jeder ungeraden Primzahl p ordnen wir einen einfachen Faktor zu: je nach Restklasse modulo 4 entweder $(p-1)/(p+1)$ oder $(p+1)/(p-1)$. Nimmt man alle ungeraden Primzahlen, so konvergiert das entstehende Produkt tatsächlich gegen 2. Interessant wird es, wenn man das Produkt *ausdünnt* und nur Primzahlen aus bestimmten Restklassen modulo 2^m zulässt. Dann treten drei deutlich verschiedene Verhaltensweisen auf: Manche Auswahlen führen wieder zu einer endlichen Konstante, andere lassen das Produkt sehr langsam gegen 0 fallen, wieder andere treiben es sehr langsam nach ∞. Wir werden diese Phänomene an konkreten Beispielen mit den ersten Faktoren sichtbar machen und anschließend das allgemeine Prinzip dahinter beschreiben. Überraschend ist, dass dabei schon in einfachen Fällen schöne Grenzwerte wie $\sqrt{2}$ auftreten.

1 Worum geht es?

Die klassische *Wallis-Formel*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdots$$

gehört zu jenen Identitäten, die man nach einmaligem Sehen kaum vergisst. Aus lauter einfachen Brüchen entsteht am Ende die Kreiszahl π. Benannt ist sie nach John Wallis (1616–1703), einem englischen Mathematiker des 17. Jahrhunderts und einem wichtigen Wegbereiter der späteren Infinitesimalrechnung. Seine *Arithmetica infinitorum* von 1656 machte ihn berühmt. Dort erscheint auch das heute nach ihm benannte Produkt [1, 2].

Unser Thema ist eine entfernte Verwandte dieser Formel. Wir multiplizieren nicht alle natürlichen Zahlen in einem regelmäßigen Schema, sondern ordnen jeder ungeraden Primzahl p einen kleinen Faktor $A(p)$ zu, der nur davon abhängt, ob p modulo 4 zur Klasse 1 oder zur Klasse 3 gehört. Da diese Faktoren sehr nahe bei 1 liegen, ist zunächst nicht klar, ob das unendliche Produkt am Ende auf eine feste Zahl zuläuft, langsam anwächst oder langsam zerfällt.

Nimmt man alle ungeraden Primzahlen, so besitzt das Produkt einen endlichen Grenzwert, und zwar genau 2. Jetzt kann man die Primzahlen ausdünnen, als einer Auswahl unterziehen, und nur solche zulassen, die modulo 8, 16, 32 oder 64 in bestimmten Restklassen liegen. Schon dann entstehen sehr unterschiedliche Welten. Manche Ausdünnungen sind so gut balanciert, dass wieder eine Konstante herauskommt. Andere enthalten einen kleinen, aber systematischen Überschuss in eine Richtung, und dieser genügt, um das Produkt langfristig gegen 0 oder gegen ∞ zu treiben.

Im Artikel schauen wir uns zunächst die ersten zehn konkreten Faktoren an, damit das Objekt sofort sichtbar wird. Danach formulieren wir das allgemeine Konvergenzprinzip und betrachten ein paar typische Beispiele. Einer der schönsten Fälle liefert am Ende sogar den Grenzwert $\sqrt{2}$.

2 Ein Faktor pro Primzahl

Für ungerade Primzahlen gibt es modulo 4 nur zwei Möglichkeiten: Beim Teilen durch 4 bleibt entweder der Rest 1 oder der Rest 3. Diese einfache Zweiteilung kodieren wir durch das Vorzeichen

$$\chi_4(p) = \begin{cases} 1, & p \equiv 1 \pmod 4, \\ -1, & p \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Man kann $\chi_4(p)$ also als einen kleinen Schalter auffassen. Er merkt sich nur, in welcher der beiden Restklassen die Primzahl liegt. Mit seiner Hilfe lassen sich beide Fälle in einer einzigen Formel bündeln:

$$A(p) = \frac{p - \chi_4(p)}{p + \chi_4(p)} = \begin{cases} \dfrac{p-1}{p+1}, & p \equiv 1 \pmod 4, \\[2ex] \dfrac{p+1}{p-1}, & p \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Diese Wahl ist aus zwei Gründen natürlich. Erstens erhält man für $p \equiv 1 \pmod 4$ einen Faktor knapp unter 1, für $p \equiv 3 \pmod 4$ dagegen einen knapp über 1. Zweitens unterscheiden sich Zähler und Nenner nur um 2. Für große Primzahlen ist $A(p)$ daher fast gleich 1. Genauer ist die Abweichung von 1 von der Größenordnung $1/p$. Deshalb ist es plausibel, sehr viele dieser Faktoren miteinander zu multiplizieren.

Die Gestalt von $A(p)$ mit den benachbarten Zahlen $p-1$ und $p+1$ erinnert dabei deutlich an die klassische Wallis-Formel. Dort wie hier stehen dicht benachbarte Zahlen im Zähler und Nenner, und aus vielen harmlos wirkenden Brüchen entsteht am Ende ein überraschender Grenzwert.

Die Primzahl 2 lassen wir übrigens weg. Sie gehört nicht zu den beiden ungeraden Restklassen modulo 4 und spielt für das hier untersuchte Verhalten keine wesentliche Rolle.

3 Die ersten zehn Brüche: so sieht das Produkt konkret aus

Bevor wir allgemeine Aussagen formulieren, lohnt es sich, einfach die ersten Faktoren hinzuschreiben. So sieht man sofort, was hier eigentlich multipliziert wird.

Alle ungeraden Primzahlen

Die ersten zehn ungeraden Primzahlen sind

$$3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.$$

Daraus entsteht das partielle Produkt

$$\frac{4}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{12}{14} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{20}{18} \cdot \frac{24}{22} \cdot \frac{28}{30} \cdot \frac{32}{30} = \frac{131072}{66825} \approx 1{,}9614.$$

Schon hier erkennt man das Grundmuster: Manche Faktoren sind größer als 1, manche kleiner. Dass sich diese Abweichungen am Ende gerade so ausgleichen, dass das unendliche Produkt den Wert 2 annimmt, ist keineswegs selbstverständlich.

Nur Primzahlen mit Rest ± 1 modulo 8

Nehmen wir nun nur Primzahlen der Form

$$p \equiv 1 \text{ oder } 7 \pmod 8.$$

Die ersten zehn davon sind

$$7, 17, 23, 31, 41, 47, 71, 73, 79, 89.$$

Das partielle Produkt lautet

$$\frac{8}{6} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{24}{22} \cdot \frac{32}{30} \cdot \frac{40}{42} \cdot \frac{48}{46} \cdot \frac{72}{70} \cdot \frac{72}{74} \cdot \frac{80}{78} \cdot \frac{88}{90} = \frac{33554432}{24393915} \approx 1{,}3755.$$

Der Wert liegt bereits recht nahe bei

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4142,$$

und tatsächlich konvergiert das unendliche Produkt in diesem Fall gegen $\sqrt{2}$.

Nur Primzahlen mit Rest ± 1 modulo 16

Jetzt wird die Auswahl noch feiner. Wir erlauben nur Primzahlen mit

$$p \equiv 1 \text{ oder } 15 \pmod{16}.$$

Die ersten zehn sind

$$17, 31, 47, 79, 97, 113, 127, 191, 193, 223.$$

Das partielle Produkt ist

$$\frac{16}{18} \cdot \frac{32}{30} \cdot \frac{48}{46} \cdot \frac{80}{78} \cdot \frac{96}{98} \cdot \frac{112}{114} \cdot \frac{128}{126} \cdot \frac{192}{190} \cdot \frac{192}{194} \cdot \frac{224}{222} \approx 1{,}00114.$$

Hier sieht man besonders schön, wie stark sich die Faktoren schon nach wenigen Schritten gegenseitig kompensieren: Das Produkt liegt beinahe genau bei 1.

Zum Vergleich: ein wirklich unbalancierter Fall

Damit man den Unterschied wirklich spürt, lohnt sich noch ein Gegenbeispiel. Betrachten wir modulo 16 die beiden Restklassen

$$S = \{3, 11\}.$$

Beide gehören zu $3 \pmod 4$, also tragen beide mit demselben Vorzeichen bei. Die ersten zehn Primzahlen in diesen Klassen sind

$$3, 11, 19, 43, 59, 67, 83, 107, 131, 139.$$

Das zugehörige Produkt beginnt mit

$$\frac{4}{2} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{20}{18} \cdot \frac{44}{42} \cdot \frac{60}{58} \cdot \frac{68}{66} \cdot \frac{84}{82} \cdot \frac{108}{106} \cdot \frac{132}{130} \cdot \frac{140}{138} = \frac{60318720}{18842083} \approx 3{,}2013.$$

Hier überwiegen nun Faktoren größer als 1, wodurch die Balance fehlt. Das Produkt driftet daher langsam nach oben, statt sich auf einen festen Grenzwert einzupendeln.

4 Das Gesamtprodukt über alle ungeraden Primzahlen

Wir betrachten nun das unendliche Produkt

$$\prod_{p \text{ odd}} A(p),$$

wobei über alle ungeraden Primzahlen multipliziert wird.

Satz 1. *Das Produkt über alle ungeraden Primzahlen besitzt einen endlichen Grenzwert und es gilt*

$$\prod_{p \text{ odd}} A(p) = 2.$$

Ein vollständiger Beweis benutzt klassische Werkzeuge der analytischen Zahlentheorie, insbesondere Euler-Produkte und Dirichlet-L-Funktionen (s. Anhang B). Für den roten Faden dieses Textes genügt es jedoch zu wissen, dass die Abweichung von $A(p)$ zu 1 ungefähr von der Größe $1/p$ ist, und sich die Beiträge aus den beiden Restklassen $p \equiv 1 \pmod 4$ und $p \equiv 3 \pmod 4$ im richtigen Mischungsverhältnis aufheben.

5 Ausdünnen nach Restklassen modulo 2^m

Fixiere $q = 2^m$ mit $m \geq 2$. Die ungeraden Restklassen modulo q bilden die Menge

$$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times = \{1, 3, 5, \ldots, q-1\}.$$

Wähle daraus eine Teilmenge $S \subset (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. Dann betrachten wir das *ausgedünnte Produkt*

$$P_S(x) = \prod_{\substack{p \leq x \\ p \text{ odd} \\ p \bmod q \in S}} A(p). \tag{1}$$

Hier multiplizieren wir also nur über Primzahlen $p \leq x$, die modulo q in S liegen.

Die zentrale Frage lautet: Existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} P_S(x),$$

und falls ja: Wovon hängt er ab?

6 Warum Balance entscheidend ist

Bis hierher haben wir nur Produkte multipliziert. Um ihr langfristiges Verhalten zu verstehen, wollen wir nicht das Produkt selbst betrachten, sondern seinen Logarithmus.

Für große Primzahlen p ist der Faktor $A(p)$ sehr nahe bei 1. Setzt man

$$u = \frac{\chi_4(p)}{p},$$

so gilt

$$A(p) = \frac{1-u}{1+u} \qquad \text{und damit} \qquad \log A(p) = \log\left(\frac{1-u}{1+u}\right) = -2u + \mathcal{O}(u^3).$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{O}$ das Landau-Symbol, welches wir im Folgenden auch in der Form o für *kleine Ordnungen* verwenden werden.

Mit $u = \chi_4(p)/p$ wird daraus die Näherung

$$\log A(p) \approx -\frac{2\chi_4(p)}{p}.$$

Der ausgelassene Fehlerterm ist dabei harmlos. Da $u = \chi_4(p)/p$ gilt, ist er von der Größenordnung $1/p^3$. Die Summe dieser Fehler über alle Primzahlen konvergiert, sodass sie das langfristige Verhalten des Produkts nicht verändert, sondern nur in die Konstante eingeht. Jede Primzahl liefert also nur einen winzigen Beitrag, ungefähr von der Größe $1/p$. Aber genau diese winzigen Beiträge summieren sich über lange Strecken auf.

Für das ausgedünnte Produkt bedeutet das näherungsweise

$$\log P_S(x) \approx -2 \sum_{\substack{p \le x \\ p \bmod q \in S}} \frac{\chi_4(p)}{p}.$$

Entscheidend ist nun nicht die Summe $\sum 1/p$ über alle Primzahlen schlechthin, sondern ihre Verteilung auf die einzelnen Restklassen modulo q. Für jede zu q teilerfremde Restklasse a gilt nämlich asymptotisch

$$\sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv a \pmod q}} \frac{1}{p} = \frac{\log\log x}{\varphi(q)} + C(q,a) + o(1).$$

Jede einzelne Restklasse liefert im Hauptterm also genau den Anteil $\log\log x/\varphi(q)$. Das ist der Punkt, an dem die Eulersche φ-Funktion ins Spiel kommt.

Gewichtet man diese Beiträge nun mit den Vorzeichen $\chi_4(a)$, so erhält man

$$\sum_{\substack{p \le x \\ p \bmod q \in S}} \frac{\chi_4(p)}{p} = \frac{\mu(S)}{\varphi(q)} \log\log x + \mathcal{O}(1),$$

wobei

$$\mu(S) = \sum_{a \in S} \chi_4(a).$$

Diese Zahl misst das Gleichgewicht der gewählten Restklassen. Sie zählt im Wesentlichen, wie viele Klassen in S vom Typ $1 \pmod 4$ und $3 \pmod 4$ sind.

Setzt man dies in die logarithmische Näherung für $P_S(x)$ ein, so erklärt sich unmittelbar, warum der Exponentenfaktor $\mu(S)/\varphi(q)$ das langfristige Verhalten bestimmt. Bei perfekter Balance ($\mu(S) = 0$) verschwindet der Hauptterm. Bei positiver oder negativer Unwucht bleibt ein Überschuss von der Größenordnung $\log\log x$ übrig.

Zwei kurze Beispiele machen das sofort anschaulich:

- Für $q = 16$ und $S = \{1, 15\}$ ist

  $$\mu(S) = \chi_4(1) + \chi_4(15) = 1 + (-1) = 0.$$

  Das ist also ein balancierter Fall.

- Für $q = 16$ und $S = \{3, 11\}$ ist

$$\mu(S) = \chi_4(3) + \chi_4(11) = -1 + (-1) = -2.$$

Hier besteht ein klarer Überschuss an Klassen vom Typ $3 \pmod 4$. Entsprechend driftet das Produkt nach oben.

7 Das Konvergenzprinzip

Nun lässt sich die bisherige Heuristik in eine präzise Formel gießen. Sie sagt nicht nur, *ob* das ausgedünnte Produkt konvergiert, sondern auch, mit welcher Geschwindigkeit es im unbalancierten Fall wegdriftet.

Satz 2. *Sei $q = 2^m$ und $S \subset (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. Dann gibt es eine Konstante $K(q, S) > 0$, so dass*

$$P_S(x) = K(q, S)\,(\log x)^{-2\mu(S)/\varphi(q)}\,(1 + o(1)) \qquad (x \to \infty),$$

wobei $\varphi(q) = 2^{m-1}$ die Eulersche φ-Funktion ist.

Daraus folgen sofort drei Fälle:

- *Ist $\mu(S) = 0$, dann besitzt $P_S(x)$ einen endlichen Grenzwert in $(0, \infty)$.*
- *Ist $\mu(S) > 0$, dann geht $P_S(x)$ gegen 0.*
- *Ist $\mu(S) < 0$, dann geht $P_S(x)$ gegen ∞.*

Wie liest man diese Formel? Die Konstante $K(q, S)$ enthält die feinen arithmetischen Details der gewählten Restklassen. Für die Grundfrage “Konvergenz oder Drift?” ist aber vor allem der Exponent

$$-\frac{2\mu(S)}{\varphi(q)}$$

entscheidend.

Ist dieser Exponent gleich 0, dann verschwindet der logarithmische Driftterm, und das Produkt kann sich auf einen echten Grenzwert einpendeln. Ist der Exponent positiv oder negativ, dann wird $P_S(x)$ durch eine Potenz von $\log x$ nach unten oder nach oben gedrückt.

Mit anderen Worten: Die Zahl $\mu(S)$ ist der grobe Kompass des Produkts, während $K(q, S)$ die feinere Höhe des Grenzwerts festlegt.

Die Drift im unbalancierten Fall ist extrem langsam. Sie geschieht nur mit einer Potenz von $\log x$. Gerade deshalb können numerische Tests über lange Strecken durchaus den Eindruck erwecken, das Produkt sei *fast konstant*, obwohl es in Wahrheit langsam, aber sicher wegdriftet.

8 Drei typische Beispiele

Die allgemeine Theorie lässt sich knapp so zusammenfassen: Balance entscheidet über die Existenz eines endlichen, von 0 verschiedenen Grenzwerts. Wie sich ein solches Produkt numerisch und begrifflich präsentiert, kann jedoch sehr unterschiedlich aussehen. Die folgenden drei Beispiele zeigen drei typische Gesichter des Phänomens.

Beispiel 1: Der klassische Fall $q = 4$, $S = \{1, 3\}$

Hier sind einfach alle ungeraden Primzahlen zugelassen, denn modulo 4 gibt es nur die beiden ungeraden Restklassen 1 und 3. Das ist der Grundfall, aus dem alles hervorgeht: keine Ausdünnung, perfekte Balance, und am Ende genau der Wert

$$\prod_{p \text{ odd}} A(p) = 2.$$

Man kann dieses Beispiel als die Primzahl-Version des Wallis-Produkts lesen. Es ist der Ausgangspunkt, an dem die Grundstruktur noch vollständig sichtbar ist.

Beispiel 2: Eine elegante Ausdünnung $q = 8$, $S = \{\pm 1\}$

Nun lassen wir nur Primzahlen mit Rest 1 oder 7 modulo 8 zu. Auch das ist balanciert: eine Klasse gehört zu 1 (mod 4), die andere zu 3 (mod 4). Trotz dieser deutlichen Ausdünnung geht nicht etwa die Struktur verloren – im Gegenteil, es erscheint eine besonders schöne Konstante:

$$\prod_{\substack{p \text{ odd} \\ p \equiv \pm 1 \ (8)}} A(p) = \sqrt{2}.$$

Dass hier gerade $\sqrt{2}$ erscheint, ist kein numerischer Zufall. Im Hintergrund steht die Auswertung einer passenden Dirichlet-L-Funktion bei $s = 1$. In der zugrunde liegenden Theorie führt im Fall $q = 8$ der klassische Wert $L(1, \psi) = \pi/(2\sqrt{2})$ genau auf diese Konstante. Gerade dieses Beispiel macht den Reiz der ganzen Geschichte aus: Man wirft viele Primzahlen weg, und doch bleibt ein erstaunlich klarer Grenzwert zurück.

Beispiel 3: Ein balancierter, aber subtiler Fall $q = 16$, $S = \{\pm 1\}$

Auch hier ist die Auswahl balanciert, also besitzt das Produkt nach dem Konvergenzprinzip einen endlichen, von 0 verschiedenen Grenzwert. Nur sagt uns das noch nicht, *welcher* Grenzwert es ist und wie schnell man ihn numerisch erkennt.

Gerade das macht dieses Beispiel interessant. Die Werte liegen auffallend nahe bei 1, aber sie nähern sich nicht monoton an. Stattdessen pendeln sie um den vermuteten Grenzwert herum und rücken ihm nur sehr langsam näher. Einige Zahlen aus dem Anhang zeigen das gut:

$$P_S(10^6) = 1{,}0000256406\ldots, \qquad P_S(10^7) = 0{,}9999838172\ldots.$$

Man bekommt dadurch fast den Eindruck, das Produkt wolle sich gar nicht entscheiden. Gerade darin liegt aber die Pointe: Balance garantiert die Konvergenz, nicht jedoch eine schnelle oder bequeme numerische Annäherung. Dieses Beispiel ist deshalb gewissermaßen die leise, feinsinnige Variante von Beispiel 2.

9 Wie hängen die Grenzwerte mit bekannten Konstanten zusammen?

An dieser Stelle drängt sich eine natürliche Frage auf: Wenn im balancierten Fall tatsächlich ein endlicher Grenzwert existiert, was für eine Zahl ist das dann eigentlich?

Die kurze Antwort lautet: Im Allgemeinen entstehen hier keine so eingängigen Konstanten wie $\sqrt{2}$, sondern arithmetische Konstanten, die aus der Verteilung der Primzahlen in Restklassen hervorgehen. Das klingt zunächst abstrakt, hat aber eine sehr konkrete Bedeutung. Hinter den Grenzwerten stehen Produkte und Konstanten, die in der analytischen Zahlentheorie seit langem bekannt sind.

Zwei Typen von Bausteinen treten besonders häufig auf:

- *Mertens-Produkte in Restklassen*, also Ausdrücke der Form

  $$\prod_{\substack{p \le x \\ p \equiv a\,(q)}} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

  deren asymptotisches Verhalten durch spezielle Konstanten beschrieben wird.

- *Euler-Produkte*, etwa

  $$\prod_{p \equiv a\,(q)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \quad \text{oder allgemeiner} \quad L(s,\chi) = \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

  die Dirichlet-L-Funktionen mit den Primzahlen verbinden.

Für unseren Artikel muss man diese Objekte nicht im Detail beherrschen. Wichtig ist nur das Bild: Das ausgedünnte Wallis-Produkt zerfällt letztlich in bekannte primzahltheoretische Faktoren. Darum ist es kein Zufall, dass im balancierten Fall saubere Konstanten herausfallen.

Beim Beispiel $q = 8$ und $S = \{\pm 1\}$ führt diese Rechnung sogar zu einem ausgesprochen schönen Ergebnis, nämlich zu $\sqrt{2}$. In anderen balancierten Fällen, etwa bei $q = 16$ und $S = \{\pm 1\}$, existiert zwar ebenfalls ein echter Grenzwert, aber er besitzt keine so eingängige Gestalt. Er ist dann eher eine *versteckte* arithmetische Konstante, die sich aus mehreren Euler- und Mertens-Faktoren zusammensetzt.

Man kann sich das so merken: Die Größe $\mu(S)$ entscheidet über das grobe Schicksal des Produkts, also über Konvergenz oder Drift. Die genaue Höhe des Grenzwerts dagegen wird von feineren Konstanten der Primzahlverteilung bestimmt.

10 Zum Schluss

Was bleibt von dieser kleinen Expedition? Zunächst die überraschende Einsicht, dass ein Produkt aus sehr schlichten, fast harmlosen Primzahlfaktoren ein erstaunlich differenziertes Verhalten zeigen kann. Schon die ungekürzte Version über alle ungeraden Primzahlen führt auf den exakten Wert 2. Dünnt man die Primzahlen nach Restklassen aus, dann wird aus einer einzigen Formel plötzlich eine ganze Familie von Produkten mit verschiedenen Schicksalen.

Die grobe Regel ist dabei einfach und einprägsam: *Balance stabilisiert, Unwucht treibt.* Sind die zugelassenen Restklassen im Sinne von χ_4 ausbalanciert, dann kann sich das Produkt auf einen echten Grenzwert einpendeln. Fehlt diese Balance, dann genügt schon ein winziger systematischer Überschuss, um das Produkt langfristig nach oben oder unten abzudrängen – allerdings so langsam, dass numerische Experimente leicht ein fast konstantes Verhalten vortäuschen.

Gerade darin liegt der Reiz dieses Themas. Die einzelnen Faktoren sehen unscheinbar aus, doch in ihrer Gesamtheit spiegeln sie die feine arithmetische Struktur der Primzahlen wider. Man könnte auch sagen: Das Produkt ist ein kleiner Seismograph für die Verteilung der Primzahlen in Restklassen modulo 2^m.

Und vielleicht ist das die schönste Pointe des ganzen Artikels. Aus dem klassischen Wallis-Motiv, bei dem aus vielen einfachen Brüchen eine berühmte Konstante entsteht, wächst hier eine primzahltheoretische Variante, in der dieselbe Grundidee weiterlebt – nur feiner, versteckter und in manchen Fällen sogar mit neuen, überraschend schönen Grenzwerten wie $\sqrt{2}$.

A Numerische Werte zur Illustration

Die folgenden Zahlen dienen der Anschauung. Sie beruhen auf der direkten Auswertung der partiellen Produkte (1). Sie ersetzen keinen Beweis, zeigen aber sehr schön, wie unterschiedlich die Produkte numerisch wirken können: Balancierte Fälle stabilisieren sich, unbalancierte driften – oft erstaunlich langsam.

Balancierte Ausdünnungen der Form $S = \{\pm 1\}$

Die erste Tabelle zeigt vier balancierte Ausdünnungen. Besonders deutlich sieht man, dass der Fall $q = 8$ rasch in die Nähe von $\sqrt{2}$ kommt, während feinere Ausdünnungen ihren Grenzwert wesentlich zögerlicher preisgeben. Insbesondere sollte man die Spalte für $q = 32$ nicht missverstehen. Auch im balancierten Fall muss der Grenzwert keineswegs gleich 1 sein. Die Werte um $1,057$ deuten vielmehr auf eine andere, von 1 verschiedene arithmetische Konstante hin.

x	$\prod_{\substack{p\le x \\ p \text{ odd} \\ p\equiv\pm1\ (8)}} A(p)$	$\prod_{\substack{p\le x \\ p \text{ odd} \\ p\equiv\pm1\ (16)}} A(p)$	$\prod_{\substack{p\le x \\ p \text{ odd} \\ p\equiv\pm1\ (32)}} A(p)$	$\prod_{\substack{p\le x \\ p \text{ odd} \\ p\equiv\pm1\ (64)}} A(p)$
10^4	1.4113275632	0.9999436166	1.0579775029	1.0006591649
10^5	1.4130836158	0.9995823760	1.0572678232	1.0001694785
10^6	1.4141098422	1.0000256406	1.0573224354	1.0003905341
10^7	1.4141721971	0.9999838172	1.0573538661	1.0003650135

Ein wirklich unbalanciertes Beispiel

Als Illustration für Satz 2 im Fall $\mu(S) \neq 0$ wählen wir nun $q = 16$ und $S = \{3, 11\}$. Dann liegen beide Restklassen in der Gruppe $3 \pmod 4$, also

$$\mu(S) = \chi_4(3) + \chi_4(11) = -2.$$

Nach Satz 2 sollte das Produkt daher mit der Größenordnung

$$(\log x)^{-2\mu(S)/\varphi(q)} = (\log x)^{1/2}$$

nach oben driften. Die Tabelle zeigt sowohl das rohe Produkt als auch das durch den Faktor $(\log x)^{-1/2}$ normierte Produkt. Während die rohen Werte weiter anwachsen, scheinen sich die normierten Werte einer festen Konstante anzunähern.

x	$\prod_{\substack{p\le x \\ p \text{ odd} \\ p\equiv 3,11\ (16)}} A(p)$	$(\log x)^{-1/2} \prod_{\substack{p\le x \\ p \text{ odd} \\ p\equiv 3,11\ (16)}} A(p)$
10^4	4.3149324585	1.4217923138
10^5	4.8235475228	1.4215878898
10^6	5.2838015898	1.4215529197
10^7	5.7070707662	1.4215311910

B Anmerkungen

- Die diesem Artikel zugrunde liegende Originalarbeit ist als Preprint auf arXiv verfügbar [8]. Diese Version soll eine verständliche, heuristisch gestützte Darstellung für ein breiteres Publikum bieten und verzichtet daher bewusst auf eine vollständige Beweisführung. Die Idee dazu entstand bereits Ende der 1990er Jahre, als ich mich noch als junger Student mit Wallis-Produkten beschäftigte.

- Die Quellen [3] bis [7] sind für die Originalarbeit wesentlich, spielen in diesem Artikel jedoch keine unmittelbare Rolle. Als weiterführende Literatur seien sie Lesern empfohlen, die tiefer in Euler-Produkte und Dirichlet-L-Funktionen einsteigen möchten.

Literatur

[1] Wallis, J.: *The Arithmetic of Infinitesimals. John Wallis 1656.* Translated from the Latin and edited by Jacqueline A. Stedall. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer, New York, 2004.

[2] O'Connor, J. J.; Robertson, E. F.: *John Wallis (1616–1703).* MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews.

[3] Davenport, H.: *Multiplicative Number Theory.* Third edition. Rev. by Hugh L. Montgomery. Graduate Texts in Mathematics 74 (2000). Springer-Verlag, New York.

[4] Languasco, A.; Zaccagnini, A.: *On the Constant in the Mertens Product for Arithmetic Progressions. I: Identities.* Funct. Approx. Comment. Math. 42 (2010), 17–27.

[5] Languasco, A.; Zaccagnini, A.: *On the Constant in the Mertens Product for Arithmetic Progressions. II: Numerical Values.* Math. Comp. 78 (2009), 315–326.

[6] Languasco, A.; Moree, P.: *Euler constants from primes in arithmetic progression.* Math. Comp. 95 (2026), 363–387.

[7] Williams, K. S.: *Mertens' theorem for arithmetic progressions.* J. Number Theory 6 (1974), 353–359.

[8] Winkler, M.: *Thinned Wallis-type prime products in residue classes modulo* 2^m. arXiv:2602.13371 [math.GM], 2026.