Vier Punkte auf einer Kurve

Ein experimenteller Zugang zur Toeplitz-Vermutung

Mike Winkler

Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, Germany
mike.winkler@ruhr-uni-bochum.de

1. Juli 2026

Zusammenfassung

Die Toeplitz-Vermutung, auch *Square Peg Problem* genannt, fragt, ob jede geschlossene überschneidungsfreie Kurve in der Ebene vier Punkte enthält, die die Eckpunkte eines Quadrats bilden. Die Frage ist so einfach, dass man sie in wenigen Sekunden versteht. Zugleich ist sie in voller Allgemeinheit bis heute offen. Dieser Artikel stellt die Vermutung vor, erklärt die geometrische Grundidee und verweist auf eine interaktive HTML-Anwendung, mit der man einen Kreis per Maus zu komplizierteren Kurven verformen kann. Das eingezeichnete Quadrat wird dabei numerisch auf eine neue Lage geschoben. Gerade dieses Experiment zeigt sehr anschaulich, warum die Vermutung plausibel ist und weshalb ein Beweis dennoch nicht aus bloßer Anschauung folgt.

1 Eine Frage von Otto Toeplitz

Eine *Jordankurve* ist eine geschlossene, stetige und überschneidungsfreie Kurve in der Ebene. Formal kann man sie als Bild einer injektiven stetigen Abbildung

$$\gamma : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

auffassen. Die Toeplitz-Vermutung behauptet:

Jede Jordankurve enthält vier Punkte, die die Eckpunkte eines nichtdegenerierten Quadrats bilden.

Nichtdegeneriert bedeutet, dass das Quadrat positive Seitenlänge hat. Es darf also nicht zu einem einzelnen Punkt zusammenschrumpfen. Die Vermutung wurde 1911 von Otto

Toeplitz formuliert und ist unter den Namen *Toeplitz-Vermutung*, *Square Peg Problem* und *Inscribed Square Problem* bekannt [1, 2].

Ein wichtiger Punkt wird leicht übersehen: Das Quadrat muss nicht in der von der Kurve eingeschlossenen Fläche liegen. Gefordert wird nur, dass seine vier Eckpunkte auf der Kurve liegen. Die Seiten des Quadrats dürfen durch das Außen- oder Innengebiet laufen und die Kurve auch schneiden. Bei eingedellten Kurven, etwa bei einer Sichelform, sucht man intuitiv oft nach einem Quadrat, das vollständig in die Fläche passt. Die Vermutung verlangt aber nur vier passende Randpunkte.

2 Der Kreis als Ausgangspunkt

Beim Kreis ist die Situation vollständig durchsichtig. Wählt man zwei zueinander senkrechte Durchmesser, so erhält man ein Quadrat, dessen vier Eckpunkte auf dem Kreis liegen. Dreht man diese beiden Durchmesser gemeinsam um den Mittelpunkt, erhält man weitere Quadratlagen. Bis auf diese Drehung ist die Lage des Quadrats aber eindeutig: Seine Diagonalen sind zwei senkrechte Durchmesser des Kreises.

Damit entsteht sofort eine naheliegende Idee. Man beginnt mit einem Kreis und verformt ihn stetig zu einer komplizierteren Jordankurve. Wenn auf dem Kreis ein Quadrat liegt, könnte dieses Quadrat während der Verformung mitwandern. Seine vier Eckpunkte rutschen auf der Kurve entlang, seine Seitenlänge ändert sich, und am Ende sollte ein Quadrat auf der verformten Kurve liegen.

Diese Vorstellung ist kein Unsinn. Viele Beweise für reguläre Spezialfälle verwenden tatsächlich topologische Stetigkeitsargumente. In dieser einfachen Form ist sie aber kein Beweis. Ein einzelner verfolgter Quadratzweig kann seine Lage wechseln, mit anderen Zweigen zusammentreffen oder zu einem Punkt degenerieren. Man muss daher global zeigen, dass nicht alle möglichen Quadratlagen verschwinden können. Genau an dieser Stelle beginnt die eigentliche Schwierigkeit.

3 Eine interaktive Anwendung

Die folgende kleine Anwendung beginnt mit einem Kreis und einem roten Quadrat. Die blauen Kontrollpunkte können mit der Maus verschoben werden. Dadurch wird die Kurve deformiert. Das Programm sucht nach jeder Verformung numerisch eine neue Lage des Quadrats.

Da ein LaTeX-Dokument keine eingebettete HTML-Anwendung ausführen kann, ersetzt die PDF-Fassung das interaktive Fenster durch die folgenden Links:

Toeplitz square tracker

https://mikematics.de/toeplitz_square_tracker.html

GitHub-Pages-Spiegel:

https://mikewinklermath.github.io/toeplitz-square-tracker/

Die Kurve in dieser Anwendung ist keine beliebige Jordankurve. Sie wird als geschlossener Catmull–Rom-Spline durch endlich viele Kontrollpunkte modelliert. Das ist für ein Experiment geeignet, aber mathematisch eine starke Einschränkung. Solche Kurven sind viel regulärer als die beliebigen stetigen Jordankurven, um die es in der offenen Vermutung geht.

4 Wie das Programm ein Quadrat sucht

Die numerische Suche beruht auf einer einfachen geometrischen Beobachtung. Wenn zwei gegenüberliegende Eckpunkte eines Quadrats festliegen, dann ist das ganze Quadrat eindeutig bestimmt.

Seien also $A = \gamma(s)$ und $C = \gamma(t)$ zwei Punkte der Kurve. Der Mittelpunkt des Quadrats ist

$$M = \frac{A + C}{2}.$$

Setzen wir

$$u = \frac{C - A}{2},$$

dann erhält man die beiden anderen Eckpunkte durch eine Drehung von u um 90°:

$$B = M + R_{\pi/2}u, \qquad D = M - R_{\pi/2}u.$$

Damit ist aus dem Punktepaar (A, C) ein Quadrat konstruiert. Nun prüft das Programm, wie nahe B und D wieder an der Kurve liegen. Aus diesen beiden Abständen entsteht ein Fehlerwert, welcher minimiert wird.

Beim Ziehen eines Kontrollpunktes versucht das Programm zunächst, die bisherige Quadratlage weiterzuverfolgen. Wird der Fehlerwert zu groß, kann man mit „Quadrat neu suchen“ eine globale Neusuche starten. Dieses Verhalten ist mathematisch aufschlussreich: Manchmal gleitet das Quadrat fast stetig mit. Manchmal springt es in eine andere Lage. Manchmal scheint es kurz verlorenzugehen und taucht nach einer Neusuche wieder auf.

5 Was man ausprobieren sollte

Ein erster Test besteht darin, nur einen Kontrollpunkt des Kreises leicht nach außen oder innen zu ziehen. Das rote Quadrat verändert dann meist ruhig seine Lage und

Seitenlänge. Anschließend kann man mehrere Punkte verschieben und eine nichtkonvexe Kurve erzeugen. Bei einer Sichelform wird sofort sichtbar, dass das gesuchte Quadrat nicht in der Sichelfläche liegen muss. Häufig liegt es schräg zur Figur und benutzt Punkte auf beiden Bögen.

Noch interessanter sind stark gewellte Kurven. Die erste Erwartung könnte lauten: Je komplizierter die Kurve wird, desto schwieriger müsste es sein, ein Quadrat zu finden. Numerisch beobachtet man oft das Gegenteil. Eine gewellte Kurve erzeugt viele Kombinationen von vier Punkten, die beinahe ein Quadrat bilden. Die Komplexität schafft also nicht nur Hindernisse, sondern auch neue Möglichkeiten.

Das stützt die intuitive Erwartung, dass die Toeplitz-Vermutung wahr sein könnte. Es ersetzt aber keinen Beweis. Ein Gegenbeispiel müsste gerade eine Kurve sein, in der alle diese Möglichkeiten auf *subtile* Weise verhindert werden. Eine solche Kurve wäre vermutlich nicht durch eine normale Zeichnung oder ein kleines Spline-Experiment zu erzeugen.

6 Was bekannt ist

Für viele reguläre Kurvenklassen ist die Aussage bewiesen. Dazu gehören insbesondere zahlreiche glatte, stückweise glatte oder hinreichend reguläre Kurven. Benjamin Matschke gibt in seinem Überblicksartikel eine gute historische und mathematische Zusammenfassung der bekannten Resultate [2].

Terence Tao formuliert das Problem so: Gefragt ist, ob jede einfache geschlossene Kurve in der Ebene ein nichtdegeneriertes Quadrat einbeschreibt, also ein Quadrat, dessen vier Ecken auf der Kurve liegen. Er weist zugleich darauf hin, dass homologische Argumente für hinreichend reguläre Kurven funktionieren, aber bei beliebig rauen Kurven an degenerierenden oder beliebig kleinen Quadraten scheitern können [3]. Tao bewies mit einem Integrationsansatz neue Spezialfälle, zum Beispiel für Kurven, die aus zwei Lipschitz-Graphen mit Konstanten kleiner als 1 zusammengesetzt sind [3].

Ein besonders starkes modernes Resultat stammt von Joshua Evan Greene und Andrew Lobb. Sie zeigten, dass jede glatte Jordankurve zu jedem vorgegebenen Rechteck ein ähnliches einbeschriebenes Rechteck besitzt [4]. Für Quadrate folgt daraus der glatte Fall der Toeplitz-Vermutung. Das ist ein eindrucksvolles Resultat, löst aber nicht den allgemeinen stetigen Fall.

7 Warum der Grenzübergang nicht genügt

Ein sehr naheliegender Beweisversuch wäre folgender: Man approximiert eine beliebige Jordankurve durch glatte Jordankurven. Jede dieser glatten Kurven enthält ein einbeschriebenes Quadrat. Danach nimmt man einen Grenzwert dieser Quadrate und erhält ein Quadrat auf der ursprünglichen Kurve.

Der kritische Schritt ist der Grenzübergang. Eine Folge nichtdegenerierter Quadrate kann im Grenzfall zu einem Punkt zusammenschrumpfen. Dann liegen zwar alle vier Grenzpunkte auf der Kurve, aber sie bilden kein Quadrat positiver Seitenlänge mehr. Gerade dieses Degenerationsproblem ist eines der zentralen Hindernisse.

Das kleine Programm zeigt davon eine harmlose numerische Version. Solange sich ein Quadrat gut verfolgen lässt, wirkt die Deformationsidee überzeugend. Wird die Kurve stärker verformt, kann die verfolgte Lage springen oder kurz instabil werden. Für einen Beweis muss man nicht eine sichtbare Lage retten, sondern zeigen, dass der gesamte Lösungsraum der Quadratlagen nicht leer werden kann.

8 Konfigurationsräume statt Zeichnungen

Aus topologischer Sicht betrachtet man nicht nur die Kurve selbst. Man betrachtet vielmehr Vierer von Punkten auf der Kurve. Dieser Raum möglicher Punktvierer enthält eine besondere Teilmenge: diejenigen Vierer, die ein Quadrat bilden. Die Toeplitz-Vermutung behauptet, dass diese Teilmenge für jede Jordankurve nicht leer ist.

Für reguläre Kurven kann man solche Räume oft mit Methoden aus der Topologie kontrollieren. Man untersucht Symmetrien, Schnittzahlen, Paritäten oder Homologieklassen. Bei einer beliebigen stetigen Kurve fehlen viele Werkzeuge, die für glatte Kurven selbstverständlich sind. Es gibt keine Tangenten, keine Krümmung und keine lokale lineare Struktur, auf die man sich verlassen könnte.

Die Vermutung ist daher kein Problem über das Zeichnen eines Quadrats. Sie ist ein Problem darüber, welche topologischen Informationen unter sehr schwachen Regularitätsannahmen erhalten bleiben.

9 Eine Versuchsanleitung

1. Beginne mit dem Kreis und verschiebe einen einzelnen Kontrollpunkt nur wenig. Beobachte, wie das Quadrat nahezu stetig mitwandert.
2. Erzeuge eine Sichelform. Achte dabei nicht auf die eingeschlossene Fläche, sondern nur auf die vier Randpunkte des Quadrats.

3. Benutze „Zufällig deformieren“ und danach mehrfach „Quadrat neu suchen“. Oft findet das Programm verschiedene Quadratlagen.
4. Erhöhe die Zahl der Kontrollpunkte. Die Kurve wird flexibler, die numerische Suche aber auch empfindlicher.
5. Verforme die Kurve so stark, dass das rote Quadrat scheinbar unplausibel liegt. Genau solche Situationen sind für das Verständnis der Vermutung besonders nützlich.

Diese Experimente machen sichtbar, warum die Vermutung zugleich plausibel und schwierig ist. Bei normalen glatten Kurven findet man sehr schnell Quadrate. Die offene Frage betrifft aber nicht normale Zeichnungen, sondern alle stetigen Jordankurven.

10 Fazit

Die Toeplitz-Vermutung ist ein gutes Beispiel für ein mathematisches Problem, bei dem die Formulierung elementar ist und die Schwierigkeit erst im Beweis sichtbar wird. Ein Quadrat, eine geschlossene Kurve und vier Randpunkte scheinen zunächst eine sehr einfache Konstellation zu bilden. Sobald man aber beliebige Jordankurven zulässt, treten Fragen nach Degeneration, Grenzübergängen und topologischer Stabilität auf.

Die interaktive Anwendung ist deshalb kein Beweis, sondern ein Experimentierfeld. Sie lässt die Deformationsidee sichtbar werden. Man sieht, dass Quadratlagen erstaunlich robust auftreten. Man sieht aber auch, dass ein einzelnes Quadrat nicht einfach als festes Objekt durch alle Verformungen hindurch verfolgt werden kann.

Vielleicht ist gerade das der Reiz dieser Vermutung. Man versteht sie sofort, man findet viele Beispiele durch Ausprobieren, und erst danach erkennt man, wie viel Mathematik zwischen der Zeichnung und dem allgemeinen Beweis liegt.

Anmerkungen

Die im Artikel eingebettete Anwendung ist ein numerischer Demonstrator. Sie arbeitet mit endlich vielen Kontrollpunkten und endlich vielen Abtastpunkten. Sie kann daher keine mathematische Existenzbehauptung beweisen. Ihr Zweck ist, die geometrische Intuition hinter der Toeplitz-Vermutung sichtbar und experimentell zugänglich zu machen.

Zwei Einschränkungen sind dabei zu beachten. Erstens wird die Kurve nur über die diskreten Kontroll- und Abtastpunkte erfasst. Das angezeigte Residuum besitzt deshalb eine untere Schranke in der Größenordnung des Abtastabstands, und die globale Suche

kann einzelne gültige Quadratlagen übersehen, deren Diagonalen sehr nahe beieinanderliegende Kurvenpunkte verbinden. Zweitens prüft das Programm nicht, ob der Spline überschneidungsfrei bleibt. Zieht man die Kontrollpunkte so, dass sich die Kurve selbst schneidet, ist sie keine *Jordankurve* mehr, und die Anwendung verlässt damit den Bereich, für den die Toeplitz-Vermutung überhaupt formuliert ist.

Literatur

[1] Toeplitz, Otto. *Über einige Aufgaben der Analysis situs*. Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft **94** (1911), 197.

[2] Matschke, Benjamin. *A survey on the square peg problem*. Notices of the American Mathematical Society **61** (2014), 346–352. Verfügbar unter https://www.ams.org/notices/201404/rnoti-p346.pdf. Erweiterte Fassung: https://www.math.u-bordeaux.fr/~bmatschke/SurveyOnSquarePeg_extension14.pdf.

[3] Tao, Terence. *An integration approach to the Toeplitz square peg problem*. Forum of Mathematics, Sigma **5** (2017), e30. Verfügbar unter https://doi.org/10.1017/fms.2017.23. ArXiv-Version: https://arxiv.org/abs/1611.07441.

[4] Greene, Joshua Evan und Lobb, Andrew. *The rectangular peg problem*. Annals of Mathematics **194** (2021), 509–517. Verfügbar unter https://annals.math.princeton.edu/2021/194-2/p04.

[5] Wikipedia. *Toeplitz-Vermutung* und *Inscribed square problem*, als Einstieg und zur Terminologie. https://de.wikipedia.org/wiki/Toeplitz-Vermutung und https://en.wikipedia.org/wiki/Inscribed_square_problem.

[6] Winkler, Mike. *Toeplitz square tracker*, interaktive HTML-Anwendung. Verfügbar unter https://mikematics.de/toeplitz_square_tracker.html. GitHub-Pages-Spiegel: https://mikewinklermath.github.io/toeplitz-square-tracker/.